Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2001.

А. А. Болибрух

Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

МЦНМО
Москва, 2002

УДК 514.83
ББК 22.151
Б79

Проведение летней школы «Современная математика» и издание настоящей брошюры осуществлено при поддержке Московской городской Думы и Московского Комитета Образования.

Болибрух А. А.

Б79 Уравнения Максвелла и дифференциальнные формы.— М.: МЦНМО, 2002.— 24 с.

ISBN 5-94057-022-4

Брошюра написана по материалам лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 16 и 19 июля 2001 года.

В брошюре рассказывается об основных понятиях дифференциальной геометрии: дифференциальных формах, расслоениях и связностях и об их использовании в современной физике.

Брошюра адресована студентам младших курсов.

ББК 22.151

ISBN 5-94057-022-4

В этих двух лекциях мы хотим рассказать вам о дифференциальных формах, расслоениях и связностях. Эти понятия сейчас очень активно используются в самых разных областях математики и физики, и нам бы хотелось хотя бы немного вас с ними познакомить. Для того чтобы наш рассказ не был излишне абстрактным, мы решили привязаться к такому физическому объекту, как *электромагнитное поле*, и показать вам, как при попытке описания этого поля естественным образом возникают все перечисленные понятия.

Разумеется, эти лекции не претендуют на систематическое изложение теории дифференциальных форм или теории расслоений и связностей. Каждый из этих сюжетов занимает примерно семестровый курс на мехмате. Наша задача гораздо скромнее: предварительное знакомство с предметом и мотивировки (пришедшие из физики) необходимости его изучения.

Лекция 1

§ 1.

Принято считать, что электромагнитное поле характеризуется двумя величинами — *вектором электрической напряженности* $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ и *вектором магнитной напряженности* $\vec{H} = (H_x, H_y, H_z)$. Предполагается, что компоненты этих векторов гладко зависят от точки пространства, а также от времени. Совокупность экспериментальных данных была обобщена Максвеллом в 1861—1862 годах в его знаменитых *уравнениях Максвелла*:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{E} = -\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{H} = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \dfrac{4\pi}{c}\vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \end{cases}$$

где c — скорость света, ρ — плотность заряда, а $\vec{j}$ — плотность тока, т. е. плотность заряда, умноженная на скорость перемещения этого заряда.

Напомним, как определяются ротор и дивергенция:

$$\operatorname{div}\vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}, \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right).$$

Но действительно ли величины $\vec{E}$, $\vec{H}$ и $\operatorname{rot}\vec{v}$ являются векторами? Как они меняются при замене координат? Скоро мы увидим, что они не очень похожи на векторы и что есть другая, более удобная форма записи тех же самых уравнений, которая возникла позднее, когда появилась теория дифференциальных форм, введенная Пуанкаре и Эли Картаном.

Чтобы лучше понять, как меняются компоненты вектора при замене координат, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Рассмотрим n-мерное пространство $\mathbb{R}^n$ (можно считать для простоты, что $n = 3$) и гладкую кривую $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, задаваемую в некоторой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ уравнениями $x^i = \varphi^i(t)$. При $t = 0$ касательный вектор к этой кривой в выбранной системе координат имеет компоненты $\xi^i = \dot{\varphi}_i(0)$ (точкой обозначается дифференцирование по t). Теперь рассмотрим новую систему координат $(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$, связанную со старой при помощи гладких функций $\hat{x}^i = f^i(x^1, \ldots, x^n)$. Компоненты касательного вектора в новой системе координат будем обозначать $\hat{\xi}^i$. Тогда

$$\hat{\xi}^i = \frac{d\hat{x}^i}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{df^i(\varphi^1(t), \ldots, \varphi^n(t))}{dt}\Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\Big|_{t=0}\xi^j$$

по формуле производной сложной функции. Вот как, оказывается, связаны координаты касательного вектора в новой и старой системах координат.

Пример 2. Рассмотрим функцию φ от n переменных: $\varphi = \varphi(\hat{x}^1, \ldots, \hat{x}^n)$. Зачем мы записали ее сразу в новых координатах, станет ясно чуть позже. Рассмотрим *градиент* этой функции (который также часто называют вектором)

$$\operatorname{grad}\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^n}\right) = (\hat{\eta}^1, \ldots, \hat{\eta}^n).$$

Теперь попробуем сделать замену координат и вычислить компоненты градиента, только на этот раз уже не в новой, а в старой системе координат:

$$\eta^i = \frac{\partial\varphi(f^1(x^1, \ldots, x^n), \ldots, f^n(x^1, \ldots, x^n))}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial\hat{x}^j}\,\frac{\partial f^j}{\partial x^i} = \sum_{j=1}^{n} \hat{\eta}^j\,\frac{\partial f^j}{\partial x^i}.$$

Сравним формулы, полученные в этих двух примерах. В обеих этих формулах участвуют выражения вида $\partial f^i/\partial x^j$, но между ними есть существенное отличие. В первом случае мы выражаем новые координаты через старые, а во втором — наоборот. Мы приходим к выводу, что при замене координат компоненты градиента меняются совсем по другому закону, чем компоненты касательного вектора. Градиент скорее напоминает не вектор, а дифференциал функции:

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}\, dx^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}^j}\, d\hat{x}^j.$$

И градиент функции, и касательный вектор являются *тензорами*, но тензорами разного типа.

§ 2.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ пространство векторных полей $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Под векторным полем мы будем понимать выражение

$$\vec{v}(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{j=1}^{n} v_j(x^1, \ldots, x^n)\, \frac{\partial}{\partial x^j},$$

где $v_j(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции, а через $\partial/\partial x^j$ обозначен вектор e_j стандартного базиса в $\mathbb{R}^n$ (эти обозначения оказываются очень удобными при рассмотрении векторных полей на многообразиях). Такие поля еще иногда называют *касательными*. Множество гладких функций на $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Множество векторных полей является линейным пространством: векторные поля можно складывать (покоординатно) и умножать на числа. Более того, их можно умножать на любые гладкие функции, заданные на всем пространстве $\mathbb{R}^n$. К сожалению, гладкие функции образуют не поле, а кольцо, поэтому говорят не о линейном пространстве векторных полей, а о *модуле векторных полей над кольцом гладких функций*.

Рассмотрим сопряженное пространство к $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ — пространство $\mathcal{F}$-линейных функционалов $\alpha\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R})$, т. е. таких отображений, что $\alpha(f\vec{v}) = f\alpha(\vec{v})$ для любой гладкой функции $f(x)$ и любого векторного поля $\vec{v}$ и $\alpha(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \alpha(\vec{v}_1) + \alpha(\vec{v}_2)$. Это сопряженное пространство также является модулем над кольцом гладких функций. Оно называется *пространством дифференциальных* 1*-форм* и обозначается $\Lambda^1(\mathbb{R}^n)$.

У этого модуля есть образующие, сопряженные к образующим $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, которые мы будем обозначать через dx^j:

$$dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Любая 1-форма может быть представлена в виде $\mathcal{F}$-линейной комбинации этих образующих:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i,$$

где $\alpha_i(x^1, \ldots, x^n)$ — гладкие функции из $\mathcal{F}$. При изменении координат в исходном пространстве соответственно меняются координаты и в сопряженном пространстве. Компоненты 1-формы при этом меняются по тому же закону, что и компоненты дифференциала. Это означает, что дифференциал функции f является частным случаем 1-формы (что оправдывает введение таких обозначений для базиса сопряженного пространства), т. е. у нас имеется отображение $d\colon \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^1(\mathbb{R}^n)$. Не всякая дифференциальная 1-форма является образом некоторой функции при взятии дифференциала, но имеет место включение: образ d лежит в пространстве 1-форм. Таким образом, дифференциал является не вектором, а *ковектором* — так принято называть дифференциальные 1-формы.

Можно ли расширить это определение, т. е. рассмотреть не только 1-формы, но и, например, 2-формы? Оказывается, это сделать совсем нетрудно. Для этого нужно лишь вместо векторного поля рассмотреть пару векторных полей, и каждой паре векторных полей поставить в соответствие гладкую функцию. И если это отображение является $\mathcal{F}$-линейным по каждому аргументу, то мы приходим к понятию 2-ковектора на множестве векторных полей: это просто $\mathcal{F}$-билинейное отображение $\alpha\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Пример 3. Рассмотрим два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ в $\mathbb{R}^3$ и отображение, сопоставляющее паре векторов их скалярное произведение:

$$r\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \qquad r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = |\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2| \cdot \cos\gamma.$$

Легко проверить что это отображение $\mathcal{F}$-билинейно; к тому же оно еще и симметрическое: если поменять местами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, то результат не изменится. Это отображение можно записать и в матричной форме:

$$r(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = (x^1 y^1 z^1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix},$$

где x^i, y^i, z^i — координаты вектора $\vec{v}_i$. Получаем симметрическую 2-форму, которая называется евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Пример 4. А вот пример (тоже хорошо всем известный) антисимметрического 2-ковектора, или *внешней формы*. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^2$ два векторных поля $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и поставим им в соответствие *ориентированную площадь* $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ параллелограмма, построенного на этих векторах. В координатах эта площадь равна определителю

$$\begin{vmatrix} x^1 & y^1 \\ x^2 & y^2 \end{vmatrix} = x^1y^2 - x^2y^1.$$

Это отображение также является линейным по каждому из аргументов, но уже обладает свойством антикоммутативности: $\tau(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = -\tau(\vec{v}_2, \vec{v}_1)$.

Именно такие 2-ковекторы (их еще называют *кососимметрическими*) представляют для нас особый интерес.

Определение 1. Отображение $\alpha\colon \underbrace{\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}_{k} \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ называется *внешней дифференциальной формой степени k*, если оно $\mathcal{F}$-линейно по каждому аргументу и

$$\alpha(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_n) = -\alpha(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_j, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n)$$

для любых i, j.

Пространство $\Lambda^k(\mathbb{R}^n)$ внешних дифференциальных форм степени k и станет объектом нашего дальнейшего изучения. Естественно, что всякий 1-ковектор можно рассматривать как внешнюю дифференциальную форму (впрочем, точно так же его можно рассматривать и как симметрическую форму).

Для того, чтобы записывать формы в координатах, мы введем новую операцию на дифференциальных формах — *внешнее произведение*. Сначала определим ее для пары 1-форм. Эта операция будет тоже $\mathcal{F}$-линейной, поэтому мы определим ее только на базисных 1-ковекторах, а затем распространим на все 1-формы по $\mathcal{F}$-линейности. Каждой паре 1-форм эта операция ставит в соответствие 2-форму, причем на базисных ковекторах она определяется следующим образом:

$$(dx^i \wedge dx^j)(\vec{v}_1, \vec{v}_2) = dx^i(\vec{v}_1)\, dx^j(\vec{v}_2) - dx^i(\vec{v}_2)\, dx^j(\vec{v}_1).$$

Легко проверить, что полученная форма кососимметрична. Замечательно, что таким образом можно получить весь базис в пространстве 2-форм. Поэтому любой элемент ω из $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$ записывается очень просто:

$$\omega = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} \alpha_{i_1 i_2}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Аналогично можно определить внешнее произведение для форм произвольной степени. Пусть α и β — p- и q-формы соответственно. Тогда внешним произведением форм α и β называется $(p+q)$-форма

$$(\alpha \wedge \beta)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}) = \\ = \frac{1}{p!\,q!} \sum \varepsilon(s) \alpha(\vec{v}_{s^{-1}(1)}, \ldots, \vec{v}_{s^{-1}(p)}) \times \beta(\vec{v}_{s^{-1}(p+1)}, \ldots, \vec{v}_{s^{-1}(p+q)}),$$

где суммирование ведется по всевозможным перестановкам $p+q$ элементов, а $\varepsilon(s)$ — знак перестановки s.

Приведенное определение инвариантно, т. е. не зависит от выбора системы координат. Но если система координат фиксирована, то из него сразу следует, что базис в пространстве k-форм состоит из элементов вида $dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$. Поэтому произвольная форма α имеет вид

$$\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} \alpha_{i_1 \ldots i_k}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Отметим еше одно замечательное свойство операции внешнего дифференцирования: $\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$. Отсюда, в частности, следует, что если степень α нечетна, то $\alpha \wedge \alpha = 0$.

§ 3.

Заметим, что операция дифференцирования каждой функции сопоставляет 1-форму. А можно ли определить операцию дифференцирования для произвольной формы? Оказывается, это очень легко сделать. По определению полагаем

$$d\alpha = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} d\alpha_{i_1 \ldots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}.$$

Видно, что дифференциал повышает на единицу степень формы. Кроме того, из этого определения сразу следует, что $d^2\alpha = 0$. Действие дифференциала на внешние формы можно представить следующей диаграммой:

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \Lambda^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d} \ldots$$

Этот объект называется *компле́ксом де Рама*, и в нем содержится большой объем информации о пространстве, на котором заданы дифференциальные формы. В данном случае мы имеем дело с $\mathbb{R}^n$, которое устроено довольно просто, но если бы мы стартовали с другого пространства, скажем, со сферы, то по этому комплексу мы бы узнали очень многое о топологии пространства.

Нетрудно проверить, что введенная с помощью координат операция внешнего дифференцирования на самом деле от координат не зависит, т. е. является инвариантной (проверьте это самостоятельно).

Наконец, последняя операция, которую нам осталось ввести — *операция внутреннего произведения*. Пусть у нас есть векторное поле $\vec{v}$ и внешняя форма α порядка p. Тогда мы можем построить форму степени $p-1$, которая называется внутренним произведением формы α и поля $\vec{v}$:

$$(i_v\alpha)(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}) = \alpha(\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p-1}).$$

Это определение также не зависит от выбора системы координат.

§ 4.

Попробуем теперь понять, что означают операторы ротора и дивергенции на инвариантном языке дифференциальных форм. Хотя мы часто писали дифференциальные формы в координатах, определение их было инвариантным, от координат не зависящим. А вот определения ротора и дивергенции зависят от выбора системы координат. Так давайте выясним, в чем же состоит эта зависимость.

Разберемся сначала с дивергенцией. Мы начинаем с векторного поля $\vec{v}$ на $\mathbb{R}^3$. По этому векторному полю мы построим 2-форму следующим образом. Возьмем *форму объема* $\tau = dx \wedge dy \wedge dz$ и рассмотрим внутреннее произведение $i_v\tau$ — это и есть обещанная 2-форма. Из нее мы получим 3-форму путем взятия внешнего дифференциала. Но пространство 3-форм на $\mathbb{R}^3$ имеет единственный базисный вектор, и это в точности форма объема $dx\wedge dy\wedge dz$. Значит, полученная нами форма есть некоторая гладкая функция, помноженная на форму объема. Проверим, что эта гладкая функция и будет дивергенцией векторного поля $\vec{v}$. Пусть поле $\vec{v}$ имеет вид

$$\vec{v} = v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Тогда

$$(i_v\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) = (dx\wedge dy\wedge dz)\Big(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\Big) = v_x,$$

$$(i_v\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = (dx\wedge dy\wedge dz)\Big(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\Big) = v_y,$$

$$(i_v\tau)\Big(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) = (dx\wedge dy\wedge dz)\Big(\vec{v}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\Big) = v_z.$$

Отсюда
$$i_v\tau = v_x\,dy\wedge dz + v_y\,dz\wedge dx + v_z\,dx\wedge dy.$$

Теперь возьмем дифференциал:
$$d(i_v\tau) = \frac{\partial v_x}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,dy\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dy =$$
$$= \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) dx\wedge dy\wedge dz.$$
Мы получили в точности дивергенцию, помноженную на форму объема. Таким образом, дивергенцию можно записать в очень компактном виде:
$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{d(i_v\tau)}{\tau}.$$
Что же здесь зависит от выбора системы координат? Внутреннее произведение и дифференциал инвариантны относительно замен координат, от координат зависит только форма объема. Выясним, при каких заменах дивергенция не меняется.

При замене координат $\hat{x}^i = f^i(x^1, x^2, x^3)$ получаем
$$\hat{\tau} = d\hat{x}^1\wedge d\hat{x}^2\wedge d\hat{x}^3 = J(f)\tau,$$
где $J(f)$ — определитель матрицы (df^i/dx^j), называемый якобианом замены. Поэтому
$$\frac{d(i_v\hat{\tau})}{\hat{\tau}} = \frac{d(J(f)i_v\tau)}{J(f)\tau} = \frac{dJ(f)\wedge i_v\tau}{J(f)\tau} + \frac{d(i_v\tau)}{\tau}.$$
В силу произвольности поля $\vec{v}$ получаем, что дивергенция не меняется лишь при таких заменах, для которых
$$dJ(f) = 0, \quad \text{т. е.} \quad J(f) = \mathrm{const}.$$

Если же под дивергенцией поля с компонентами v_x, v_y, v_z понимать компоненту внешнего дифференциала 2-формы с компонентами v_x, v_y, v_z (это форма $i_v\tau$, выписанная выше), то такое определение инвариантно полностью, т. е. при этом дивергенция никак от выбора координат не зависит.

Рассмотрим теперь ротор векторного поля $\vec{v}$. Для этого введем отображение
$$\sigma\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\to\Lambda^1(\mathbb{R}^3),\ \ \sigma\left(v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z}\right) = v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz.$$
Заметим, что
$$(d\circ\sigma)(\vec{v}) = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx\wedge dy + \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) dz\wedge dx.$$

Рассмотрим отображение $\varkappa\colon \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, «обратное» к внутреннему произведению, т. е. такое, что $i_{\varkappa(\alpha)}\tau = \alpha$ для всех $\alpha \in \Lambda^2(\mathbb{R}^3)$, где τ по-прежнему форма объема в $\mathbb{R}^3$. Тогда

$$\operatorname{rot}\vec{v} = (\varkappa \circ d \circ \sigma)(\vec{v}).$$

Проверка полученного соотношения сводится к проверке тождества $i_{\operatorname{rot}\vec{v}}\tau = d(\sigma(\vec{v}))$, которая проводится точно так же, как вычисление формы $i_v\tau$ в случае дивергенции.

Проанализируем эту конструкцию. Нетрудно видеть, что задание σ равносильно определению отображения

$$r\colon \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3) \to \mathcal{F}(\mathbb{R}^3), \quad r(\vec{v}, \vec{w}) = (\sigma(\vec{v}))(\vec{w}).$$

Но из формулы для σ вытекает, что r совпадает с симметрической 2-формой из примера 3, т. е. r является евклидовой метрикой в $\mathbb{R}^3$.

Заметим, что в определении отображения $\varkappa$ существенную роль играет трехмерность пространства $\mathbb{R}^3$, так как степень формы $i_{\varkappa(\alpha)}\tau$ на единицу меньше размерности пространства, а форма α имеет степень два.

Отсюда следует вывод: операция взятия ротора векторного поля может быть определена инвариантно лишь на ориентированном трехмерном многообразии, снабженном евклидовой метрикой (проверьте самостоятельно этот вывод, вычислив те замены координат, при которых компоненты ротора векторного поля действительно преобразуются как компоненты векторного поля).

Этот вывод показывает, что ротор лучше определять не как векторное поле, а инвариантным образом: как внешний дифференциал ковекторного поля $v_x\,dx + v_y\,dy + v_z\,dz$.

§ 5.

Перейдем теперь непосредственно к анализу уравнений Максвелла. Если следовать традиционному взгляду, что составляющие электромагнитного поля — поля $\vec{E}$, $\vec{H}$ — это векторные поля, то анализ структуры операторов ротора и дивергенции показывает, что уравнения Максвелла могут быть записаны корректно лишь в трехмерном ориентированном пространстве, снабженном евклидовой метрикой.

Но тот факт, что ротор и дивергенция могут меняться при каких-то заменах координат, не отражает физику уравнений Максвелла, потому что природа этих уравнений никак не связана с наличием, скажем, метрики в пространстве или с выбором системы координат. Поэтому нам хотелось бы иметь какое-то инвариантное описание уравнений Максвелла.

Все вышеперечисленное позволяет предположить, что электромагнитное поле есть дифференциальная форма степени два[1].

Эта 2-форма Ω, называемая *тензором электромагнитного поля*, определена на четырехмерном пространстве $\mathbb{R}^4$ с координатами (x, y, z, t), где t — время, и имеет вид:

$$\Omega = cE_x\,dx\wedge dt + cE_y\,dy\wedge dt + cE_z\,dz\wedge dt + \\ + H_x\,dy\wedge dz + H_y\,dz\wedge dx + H_z\,dx\wedge dy.$$

Вычислим дифференциал этой формы и приравняем его к нулю.

$$d\Omega = c\,\frac{\partial E_x}{\partial y}\,dy\wedge dx\wedge dt + c\,\frac{\partial E_x}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dt + c\,\frac{\partial E_y}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dt + \\ + c\,\frac{\partial E_y}{\partial z}\,dz\wedge dy\wedge dt + c\,\frac{\partial E_z}{\partial x}\,dx\wedge dz\wedge dt + c\,\frac{\partial E_z}{\partial y}\,dy\wedge dz\wedge dt + \\ + \frac{\partial H_x}{\partial x}\,dx\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial H_x}{\partial t}\,dt\wedge dy\wedge dz + \frac{\partial H_y}{\partial y}\,dy\wedge dz\wedge dx + \\ + \frac{\partial H_y}{\partial t}\,dt\wedge dz\wedge dx + \frac{\partial H_z}{\partial z}\,dz\wedge dx\wedge dy + \frac{\partial H_z}{\partial t}\,dt\wedge dx\wedge dy = 0.$$

Соберем коэффициенты при $dx\wedge dy\wedge dz$:

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0,$$

и мы получим второе уравнение Максвелла. Теперь соберем коэффициенты при $dx\wedge dy\wedge dt$:

$$c\Big(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial t}\Big) = 0.$$

Это есть z-компонента первого уравнения Максвелла. Собирая коэффициенты при $dy\wedge dz\wedge dt$ и $dz\wedge dx\wedge dt$, мы получим x- и y-компоненты этого уравнения соответственно.

Итак, первые два уравнения Максвелла мы можем записать очень просто:

$$d\Omega = 0.$$

В чем преимущество этой записи? Мы записали уравнения в инвариантной форме: ни дифференциальные формы, ни внешнее дифференцирование не зависят ни от координат, ни от ориентации, ни от метрики.

Вспомним теперь, что $d^2 = 0$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} d \subset \operatorname{Ker} d$. Но в пространстве $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре: $\operatorname{Im} d = \operatorname{Ker} d$. Из этой леммы следует, что всякая замкнутая форма (дифференциал от которой равен 0) является точной (т. е. является дифференциалом некоторой

[1] Здесь уместно еще раз отметить, что традиционная форма записи уравнений Максвелла появилась до создания теории дифференциальных форм.

формы). В частности, $\Omega = d\omega$, где ω есть 1-форма на пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$\omega = A_x\,dx + A_y\,dy + A_z\,dz + A_t\,dt.$$

Эта форма называется 4-*потенциалом электромагнитного поля*. Введем, как это обычно делается в физике, координаты $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$, $x^4 = ct$. Тогда мы можем записать наши формы в виде

$$\Omega = F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad \omega = A_\mu\,dx^\mu$$

(знак суммирования по повторяющимся верхнему и нижнему индексам опущен). Тот факт, что $\Omega = d\omega$, можно записать совсем просто:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Именно так выглядят уравнения Максвелла во всех современных учебниках физики.

Заметим, что форма ω определяется по форме Ω неоднозначно: мы можем всегда прибавить к этой форме точную 1-форму, т. е. дифференциал функции: $\omega' = \omega + dS$. И вновь мы получим, что $d\omega' = \Omega$, так как квадрат дифференциала равен нулю. Это означает, что 4-потенциал определяется, как говорят, *с точностью до калибровочных преобразований*: $A'_\mu = A_\mu + \partial S/\partial x_\mu$. А поскольку в уравнения Максвелла входят только элементы $F_{\mu\nu}$, то, стало быть, выбор 4-потенциала не влияет на уравнения Максвелла.

Так обстоят дела в классической электродинамике. Но уже в квантовом случае движение частицы зависит не только от тензора электромагнитного поля, но и от 4-потенциала, и там калибровки имеют более важное значение.

Лекция 2

На предыдущей лекции мы записали фарадееву часть уравнений Максвелла (т. е. первые два уравнения) в виде

$$d\Omega = 0,$$

где $\Omega = F_{\mu\nu}\,dx^\mu \wedge dx^\nu$, $\mu < \nu$ (знак суммирования по повторяющимся индексам здесь и ниже, как правило, опускается) — тензор электромагнитного поля.

Затем, используя тот факт, что для пространства $\mathbb{R}^4$ имеет место лемма Пуанкаре (каждая замкнутая форма на этом пространстве является точной), мы переписали полученное уравнение в виде

$$\Omega = d\omega, \quad \omega = A_\mu \, dx^\mu,$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}, \quad \mu < \nu.$$

Форма ω называется 4-потенциалом электромагнитного поля и определяется с точностью до калибровочных преобразований $A'_\mu = A_\mu + \partial S/\partial x_\mu$.

Так обстоит дело, если пространство, на котором разворачиваются события, — $\mathbb{R}^4$. Но не всегда ареной физических событий бывает $\mathbb{R}^4$. Например, уравнение магнитного диполя Дирака описывает ситуацию, когда в одной точке пространства расположен магнитный заряд. Тогда все уравнения пишутся в пространстве $(\mathbb{R}^3 \setminus \{x\}) \times \mathbb{R}$. В качестве такого пространства может также выступать произведение трехмерного тора на $\mathbb{R}$ и т. д.

В этих случаях лемма Пуанкаре уже не всегда имеет место, т. е. глобальный 4-потенциал может не существовать. Однако, поскольку локально каждое многообразие устроено как евклидово пространство, в каждой карте свой 4-потенциал может быть построен. Но как связать вместе все эти локальные 4-потенциалы, как записать в инвариантной форме уравнения электромагнитного поля, заданного на всем пространстве и не зависящего от выбора карт (т. е. локальных систем координат)? Для этого и существует язык расслоений и связностей, к знакомству с которым мы теперь и приступаем.

§ 6.

Мы начнем с простого примера расслоения, который вам очень хорошо знаком.

Пример 1. Рассмотрим функцию $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$. Ее можно представить в виде графика в пространстве $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$. Это множество точек $s = (x, f(x))$, где $x = (x^1, x^2, x^3, x^4)$. Имеется естественная проекция π пространства $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$, состоящего из точек (x, y), на $\mathbb{R}^4$: $(x, y) \mapsto x$ (рис. 1). Наша функция есть не что иное, как отображение s из *базы* — пространства $\mathbb{R}^4$ — в пространство $\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^2$; при этом $\pi \circ s = \mathrm{id}$. Всякое отображение s, обладающее таким свойством, называется *сечением*. А сама конструкция, которую мы построили, называется (*тривиальным*) *расслоением* или *прямым произведением*.

Теперь мы обобщим приведенную в примере конструкцию. Рассмотрим покрытие $\mathbb{R}^4$ открытыми множествами U_i. Пусть для каждого непустого пересечения $U_i \cap U_j$ задана некоторая функция со значениями в группе невырожденных матриц размера 2×2:

$$g_{ij} \colon U_i \cap U_j \to \mathrm{GL}(2; \mathbb{R}).$$

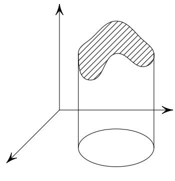

Рис. 1

Если набор функций $\{g_{ij}\}$ обладает свойствами

1) $g_{ji}(x) = (g_{ij}(x))^{-1}$,

2) $g_{ij}(x) \cdot g_{jk}(x) \cdot g_{ki}(x) = I$ $\quad$ (если $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \varnothing$),

то этот набор называют *склеивающим коциклом* (здесь $(g_{ij}(x))^{-1}$ — это матрица, обратная к $g_{ij}(x)$; I — единичная матрица). При помощи склеивающего коцикла можно построить новый объект, который локально похож на сконструированное в предыдущем примере прямое произведение.

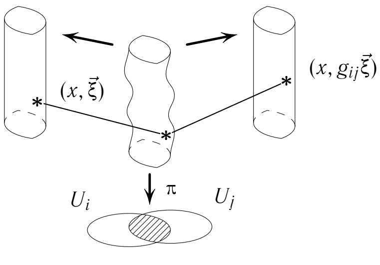

Рис. 2

«Кирпичиками» в нашей конструкции будут пространства $U_i \times \mathbb{R}^2$, которые мы будем склеивать по множествам $(U_i \cap U_j) \times \mathbb{R}^2$. Есть очень простой способ склейки: точка $(x, \vec{\xi})$ из $U_i \times \mathbb{R}^2$ склеивается (отождествляется) с точкой $(x, \vec{\xi})$ из $U_j \times \mathbb{R}^2$. Тогда интуитивно ясно, что мы получим в точности прямое произведение. Давайте поступим иначе — склеим цилиндры «с подкруткой»: точку $(x, \vec{\xi})$ отождествим с точкой $(x, g_{ij}\vec{\xi})$ (рис. 2). Ограничения, наложенные на функции g_{ij}, обеспечивают корректность такой склейки. Свойство 1) означает, что если точка $(x, \vec{\xi})$ склеивается с некоторой точкой $(x, \vec{\eta})$, то точка $(x, \vec{\eta})$ склеивается с точкой $(x, \vec{\xi})$. Если у нас имеется пересечение трех цилиндров, то мы склеиваем точку из первого цилиндра с точкой из второго цилиндра, ту, в свою очередь, — с точкой из третьего цилиндра, а ее — с точкой из первого цилиндра. Свойство 2) гарантирует нам, что после таких склеек точка первого цилиндра перейдет в себя.

После склейки мы получим некоторое пространство P, сконструированное из этих цилиндриков, у которого будет естественная проекция π на базу $\mathbb{R}^4$. Причем эта проекция корректно определена для всех цилиндриков, и склейка ее не портит.

Полученный объект называют *векторным расслоением с базой* $\mathbb{R}^4$*, пространством расслоения* P*, слоем* $\mathbb{R}^2$ *и структурной группой* $\mathrm{GL}(2; \mathbb{R})$.

Возьмем теперь другой склеивающий коцикл и построим соответствующее ему векторное расслоение P' с отображением проектирования π'. Если существует взаимно-однозначное гладкое в обе стороны линейное на каждом слое отображение F из P в P', такое что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\pi"'] & & P' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & R^4 & \end{tikzcd}$$

коммутативна (т. е. $\pi' \circ F = \pi$), то говорят, что расслоения P и P' *эквивалентны*. Расслоения, эквивалентные прямому произведению, называют *тривиальными*. Можно доказать, что если в качестве базы выступает пространство $\mathbb{R}^4$, то все расслоения будут тривиальными. Но ясно, что в приведенной конструкции конкретный вид базы (в качестве которой мы выбрали для простоты пространство $\mathbb{R}^4$) и размерность слоя (пространства $\mathbb{R}^2$ в нашем случае) ни при чем. В качестве базы может выступать любое многообразие, а в качестве слоя — евклидово пространство любой размерности.

Приведем пример нетривиального расслоения с базой S^1 (окружность).

Пример 2. Рассмотрим два экземпляра цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ и выбросим из первого цилиндра прямую $\{x\} \times \mathbb{R}$, а из второго — прямую $\{y\} \times \mathbb{R}$, где x и y — различные точки окружности S^1. Получим два кирпичика $U_1 \times \mathbb{R}$ и $U_2 \times \mathbb{R}$, где $U_1 = S^1 \setminus \{x\}$, а $U_2 = S^1 \setminus \{y\}$. Пересечение $U_1 \cap U_2$ состоит из двух компонент V_1 и V_2. Если $z \in V_1$, то склеим точки (z, t) и (z, t). Если же $z \in V_2$, то склеим наши кирпичики следующим образом: точка (z, t) первого кирпичика склеится с точкой $(z, -t)$ второго, т. е. в нашем случае склеивающий коцикл состоит из одного элемента g_{12}, тождественно равного единице на V_1 и равного -1, если $z \in V_2$. Структурная группа является группой $\mathrm{GL}(1; \mathbb{R})$, т. е. группой ненулевых действительных чисел с операцией умножения.

Пространство этого расслоения — поверхность, похожая на лист Мёбиуса, только бесконечная. Она не гомеоморфна цилиндру $S^1 \times \mathbb{R}$, поскольку цилиндр — ориентируемое многообразие, а полученное нами пространство расслоения — нет. Значит, это расслоение нетривиально.

Сечение произвольного расслоения определяется точно так же, как и в разобранном случае прямого произведения: это такое отображение s из базы в пространство расслоения, что $\pi \circ s = id$. Сечения расслоения образуют модуль над кольцом гладких функций базы: их можно складывать (покоординатно и поточечно) и умножать на функции.

§ 7.

У прямого произведения есть следующее замечательное свойство: сечение прямого произведения можно дифференцировать вдоль любого векторного поля $\vec{v}$ базы. А именно, возьмем сечение $(x, f(x))$ и поставим ему в соответствие новое сечение $(x, \partial_v f)$, где $\partial_v f = df(\vec{v}))$. Выражение df есть векторнозначная 1-форма вида $(df^1, \ldots, df^4)$; ее значение на векторном поле $\vec{v}$ — гладкая вектор-функция $((df^1(\vec{v}), \ldots, df^4(\vec{v}))$. А ее график (т. е. сечение $(x, df(\vec{v})))$ и будет искомой производной $(x, \partial_v f)$ исходного сечения вдоль $\vec{v}$.

Можно ли похожим образом научиться дифференцировать сечения произвольного расслоения? На сечение расслоения можно смотреть как на согласованную совокупность (x, f_i) сечений кирпичиков $U_i \times \mathbb{R}^2$. Условие согласованности состоит в том, что эти локальные сечения склеиваются в глобальное, т. е. для любой точки $x \in U_i \cap U_j$ имеет место тождество $f_i(x) = g_{ij}(x) f_j(x)$.

Давайте продифференцируем каждое такое элементарное сечение обычным образом вдоль векторного поля. Нужно только проверить, что полученные локальные сечения вновь корректно склеиваются:

$$\partial_v f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j.$$

Если бы члена $(\partial_v g_{ij}) f_j$ не было, сечения бы склеивались и при склеивании давали глобально определенное, без разрывов, сечение. Но если функции g_{ij} зависят от x, то это определение ни к чему хорошему не приводит. Заметим, что *невязка* этой формулы — член, линейный по f_j. Давайте чуть-чуть подправим определение производной вдоль векторного поля, добавив такую линейную по f часть, чтобы новые сечения склеились. А именно, определим новую производную, которая будет называться *ковариантной производной вдоль векторного поля* $\vec{v}$:

$$\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i,$$

где A_v^i — матрица размера 2×2 (здесь суммирование по индексу i не производится). Мы постараемся подобрать матрицы A_v^i (свою для каждого кирпичика) так, чтобы в итоге после применения ковариантной производной все локальные сечения склеились в одно.

Распишем определение ∇_v:

$$\begin{aligned}\nabla_v f_i = \partial_v f_i + A_v^i f_i = \partial_v (g_{ij} f_j) + A_v^i (g_{ij} f_j) = (\partial_v g_{ij}) f_j + g_{ij} \partial_v f_j + A_v^i g_{ij} f_j = \\ = g_{ij} (g_{ij}^{-1} (\partial_v g_{ij}) f_j + \partial_v f_j + g_{ij}^{-1} A_v^i g_{ij} f_j) = g_{ij} \nabla_v f_j.\end{aligned}$$

Последнее равенство необходимо для того, чтобы локальные сечения склеились. Выражение $\nabla_v f_j$ должно содержать член $\partial_v f_j$, следовательно, сумма остальных членов должна равняться $A^j_v f_j$:

$$A^j_v = g^{-1}_{ij} \partial_v g_{ij} + g^{-1}_{ij} A^i_v g_{ij}.$$

Отсюда

$$A^i_v = -\partial_v g_{ij} g^{-1}_{ij} + g_{ij} A^j_v g^{-1}_{ij}.$$

Итак, если удается найти матричные функции A^i_v, удовлетворяющие полученному условию, то можно ввести операцию дифференцирования сечений вдоль векторного поля $\vec{v}$.

Но как быть, если надо продифференцировать сечения вдоль другого векторного поля? Искать каждый раз подходящие матричные функции было бы довольно затруднительно. Кроме того, естественно было бы ожидать, что $\nabla_{v_1} f + \nabla_{v_2} f = \nabla_{v_1+v_2} f$, как в случае обычных функций. Поэтому давайте потребуем, чтобы на каждой окрестности U_i была задана матричная дифференциальная форма (т. е. матрица размера 2×2, все элементы которой являются 1-формами) ω_i так, что

$$\omega_i = -dg_{ij} g^{-1}_{ij} + g_{ij} \omega_j g^{-1}_{ij} \qquad (*)$$

для любых пересекающихся U_i и U_j.

Тогда оказывается, что мы можем дифференцировать любое сечение вдоль любого векторного поля. Для этого нужно лишь положить

$$A^i_v = \omega_i(\vec{v}).$$

Определение 2. Говорят, что в векторном расслоении задана *связность*, если для любого набора окрестностей и склеивающих коциклов, по которым можно построить это расслоение, задан набор дифференциальных матричных 1-форм $\{\omega_i\}$, удовлетворяющих свойству $(*)$. Связность обозначается обычно значком ∇. Форма ω_i называется локальной формой связности.

Связность соотносится с ковариантной производной примерно так же, как дифференциал функции с частной производной. Если s — сечение расслоения, имеющее в цилиндре $U_i \times \mathbb{R}^2$ вид $(x, f_i(x))$, то

$$\nabla s = (x, df_i + \omega_i f_i). \qquad (**)$$

Другими словами, если мы применим к сечению не ковариантное дифференцирование, а оператор связности, то мы получим сечение с коэффициентами в 1-формах. Проиллюстрируем это диаграммой:

$$\nabla\colon \{\text{сечение}\} \to \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^4).$$

Итак, связность в векторном расслоении — это просто возможность дифференцировать сечения. Связность является линейным отображением (т. е. $\nabla(s_1 + s_2) = \nabla s_1 + \nabla s_2$) и удовлетворяет правилу Лейбница: для любого $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^4)$ и для любого сечения s имеем $\nabla(fs) = (df)s + f\nabla s$.

Это инвариантное определение связности: говорят, что на расслоении задана связность, если любому сечению ставится в соответствие $\{$сечение$\} \otimes \{$дифференциальная форма$\}$, и это отображение линейно и удовлетворяет правилу Лейбница. Легко показать что такое определение связности эквивалентно данному выше «координатному».

Рассмотрим снова цилиндр $U_i \times \mathbb{R}^2$. В нем есть стандартный базис сечений $\xi_1 = (x, e_1)$, $\xi_2 = (x, e_2)$ (где e_1 и e_2 образуют стандартный базис в $\mathbb{R}^2$). Любое сечение $s = (x, f_i(x))$ над U_i может быть записано в виде $s = f_i^1\xi_1 + f_i^2\xi_2 = (\xi_1, \xi_2)f_i$ (где последнее выражение понимается как произведение строки на столбец). Для построенных сечений имеем

$$\nabla\xi_j = (x, \nabla e_j) = (x, \omega_i e_j) = (x, \omega_i^j),$$

где через ω_i^j обозначен j-й столбец матричной дифференциальной формы ω_i.

Следовательно, $(\nabla\xi_1, \nabla\xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\omega_i$ (вектор-строка умножается на матрицу), поэтому на матрицу ω_i можно смотреть как на матрицу связности в базисе (ξ_1, ξ_2).

Теперь делается более понятным смысл выражения $(**)$. Его можно переписать в виде

$$\nabla f_i = df_i + \omega_i f_i.$$

Это действие связности на координатах сечения s (по отношению к базисным сечениям ξ_1, ξ_2).

Во всяком ли векторном расслоении можно ввести связность? Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение, которое мы оставляем читателю в качестве упражнения.

В любом гладком векторном расслоении можно ввести связность.

(*Указание*: Рассмотрите гладкое разбиение единицы $\{\lambda_i\}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}$; так как над каждым U_i расслоение имеет вид прямого произведения, в ограничении расслоения на U_i можно ввести некоторую связность ∇_i; покажите, что линейная комбинация $\sum \lambda_i \nabla_i$ является корректно определенной связностью в исходном расслоении.)

Сечение s называется *горизонтальным* (по отношению к связности ∇), если $\nabla s = 0$.

Из $(**)$ следует, что в базисе ξ_1, ξ_2 локальных сечений расслоения над U_i координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df_i = -\omega_i f_i.$$

Если расслоение тривиально, то в базисе ξ_1, ξ_2 глобальных сечений расслоения координаты горизонтальных сечений удовлетворяют следующей системе дифференциальных уравнений:

$$df = -\omega f.$$

В другом базисе сечений (при другой тривиализации расслоения) ξ_1', ξ_2' согласно $(*)$ уравнение горизонтальных сечений принимает вид

$$df' = -\omega' f', \quad \text{где} \quad f' = \Gamma y, \quad \omega' = -d\Gamma\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}$$

(и где в свою очередь $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1', \xi_2')\Gamma$). Заметим, что такие преобразования называются *калибровочными преобразованиями* формы связности.

Итак, *связность в тривиальном расслоении задает систему дифференциальных уравнений с точностью до калибровочных преобразований.*

Если же расслоение нетривиально, то связность задает согласованное (в смысле соотношений $(*)$) семейство систем дифференциальных уравнений.

§ 8.

Попробуем продолжить диаграмму дифференцирования сечений:

$$\{\text{сечение}\} \xrightarrow{\nabla} \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\tilde{\nabla}} \{\text{сечение}\} \otimes \Lambda^2(\mathbb{R}^n),$$

где отображение $\tilde{\nabla}$ каждому сечению с коэффициентами в 1-формах ставит в соответствие сечение с коэффициентами в 2-формах. Мы также потребуем, чтобы для него выполнялось правило Лейбница:

$$\tilde{\nabla}(f\alpha) = df \wedge \alpha + f\,\tilde{\nabla}\alpha, \quad \tilde{\nabla}(\beta s) = (d\beta)s - \beta \wedge \nabla s$$

для произвольной функции f, сечения s и 1-формы β. Определим сквозное отображение $K = \tilde{\nabla} \circ \nabla$.

Лемма. *Отображение K является $\mathcal{F}$-линейным.*

Доказательство. Пусть f — функция, s — сечение. Тогда

$$K(fs) = \tilde{\nabla}(\nabla(fs)) = \tilde{\nabla}((df)s + f\,\nabla s) = (d^2 f)s - df \wedge \nabla s + df \wedge \nabla s + fK(s) = fK(s),$$

поскольку $d^2 f = 0$, а второй и третий члены сокращаются. □

Отображение K называется *тензором кривизны связности*. Локально над U_i в базисе ξ_1, ξ_2 тензор кривизны можно записать в виде

$$K(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1, \xi_2)\Omega_i,$$

где Ω_i — матрица дифференциальных 2-форм.

Вычислим эту матрицу в нашем базисе через ω_i:

$$\widetilde{\nabla}(\nabla(\xi_1, \xi_2)) = \widetilde{\nabla}((\xi_1, \xi_2)\omega_i) = (\nabla\xi_1, \nabla\xi_2) \wedge \omega_i + (\xi_1, \xi_2)\, d\omega_i = \\ = (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i) + (\xi_1, \xi_2)\, d\omega_i = (\xi_1, \xi_2)(\omega_i \wedge \omega_i + d\omega_i).$$

Сравнивая коэффициенты при базисных векторах слева и справа, мы получаем уравнение $\Omega_i = d\omega_i + \omega_i \wedge \omega_i$. (Внешнее произведение $\omega_i \wedge \omega_i$ не обязано равняться нулю, поскольку ω_i — матричная форма.) Полученное уравнение называется *структурным уравнением*. Дифференцируя это уравнение, мы получим $d\Omega_i = \Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i$. Это равенство носит название *тождество Бьянки*. Введя новый оператор $D\Omega_i = d\Omega_i - \Omega_i \wedge \omega_i + \omega_i \wedge \Omega_i$ (его называют *ковариантной производной формы*), данное выражение можно переписать в виде

$$D\Omega_i = 0.$$

§ 9.

По аналогии с конструкцией векторного расслоения рассмотрим теперь *главное расслоение*. Для этого вместо $\mathbb{R}^2$ в наших кирпичиках возьмем $\mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$, т. е. в качестве элементарных цилиндров будем рассматривать цилиндры $U_i \times \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$. Склеивать мы их будем точно так же, с помощью коцикла $\{g_{ij}\}$:

$$(x, G) \sim (x, g_{ij}G), \quad \text{если } x \in U_i \cap U_j.$$

Только умножать матрицу g_{ij} нам придется уже не на вектор, а на другую матрицу G. Расслоение, у которого структурная группа и слой — это одно и то же пространство, называют *главным расслоением*.

В главном расслоении также можно ввести связность, формально воспользовавшись данным ранее определением (как совокупность согласованных с помощью соотношения $(*)$ матричных дифференциальных форм). Но ее уже нельзя будет рассматривать как дифференцирование вектор-сечений. Геометрическая интерпретация связности в главном расслоении состоит в том, что связность выделяет в касательном пространстве к каждой точке пространства расслоения подпространство так называемых горизонтальных векторов, гладко зависящее от точки.

Объем данной брошюры не позволяет нам познакомиться подробнее с этой интерпретацией. Отметим лишь еще раз, что аналогично случаю векторного расслоения в главном расслоении можно ввести кривизну связности и выписать структурное уравнение и тождество Бьянки.

§ 10.

Вернемся вновь к уравнениям Максвелла. Оказывается, *на электромагнитное поле можно смотреть как на связность в главном расслоении над* $\mathbb{R}^4$ *со структурной группой и слоем* $\mathrm{U}(1) \subset \mathrm{GL}(1;\mathbb{C})$ ($\mathrm{U}(1)$ — это группа комплексных чисел, равных по модулю 1, т. е. геометрически это окружность S^1).

В этом расслоении функции склейки g_{ij} принимают значение в группе $\mathrm{U}(1)$, а формы связности и кривизны становятся скалярными, а не матричными. Поэтому для локальных форм связности и кривизны связности получаем: $\omega_i \wedge \omega_i = 0$ и $\Omega_i \wedge \omega_i - \omega_i \wedge \Omega_i = 0$. Структурное уравнение принимает при этом вид $\Omega_i = d\omega_i$, а тождество Бьянки — $d\Omega_i = 0$.

Поэтому локальную форму связности $\omega_i = A^i_\mu dx^\mu$ мы будем интерпретировать как локальный 4-потенциал в данной калибровке, т. е. в данной локальной тривиализации расслоения над U_i, локальную форму кривизны Ω_i — как тензор электромагнитного поля в данной калибровке, а тождество Бьянки превратится в фарадееву часть уравнений Максвелла.

При переходе от одной локальной формы связности к другой (т. е. при замене калибровки) получим согласно соотношению $(*)$ (и согласно тому, что функции склейки — скалярные):

$$\omega_i = -dg_{ij}g_{ij}^{-1} + g_{ij}\omega_j g_{ij}^{-1} = \omega_j + dS_{ij},$$

где $S_{ij} = d\log(-g_{ij})$, или в терминах компонент формы ω_i:

$$A^i_\mu = A^j_\mu + \frac{\partial S_{ij}}{\partial \mu}.$$

Согласно этой формуле, компоненты локальной формы связности преобразуются точно так же, как компоненты 4-потенциала электромагнитного поля при калибровочных преобразованиях, что еще раз подтверждает правильность нашей интерпретации.

Итак, в случае главного расслоения все наши формулы могут быть описаны на двух языках: геометрическом и физическом. Составим соответствующий словарик:

Выбор локального цилиндра (локальная тривиализация)	$U_i \times G$ ($U_i \times S^1$)	Калибровка
Локальная форма связности	$\omega_i = A^i_\mu dx^\mu$	4-потенциал электромагнитного поля в данной калибровке
Связность	∇	Электромагнитное поле
Локальная форма кривизны связности	Ω_i	Тензор электромагнитного поля в данной калибровке
Тензор кривизны связности	K	Тензор электромагнитного поля
Тождество Бьянки	$D\Omega_i = 0$	Фарадеева часть уравнений Максвелла
Пространство расслоения	P ($\mathbb{R}^4 \times S^1$)	Фазовое пространство физической системы
База расслоения	B ($\mathbb{R}^4$)	Пространство-время
Структурная группа расслоения	G ($\mathrm{U}(1)$)	Группа «вращений» в зарядовом пространстве.

Последняя строчка словарика требует пояснения. Дело в том, что структурная группа $\mathrm{U}(1)$ появляется в описании электромагнитного поля в связи с тем, что физическая ситуация не должна зависеть от выбора фазы (выбора направления в зарядовом пространстве), что соответствует инвариантности относительно калибровочных преобразований вида $g_{ij} = \exp(is(x))$ со значениями в $\mathrm{U}(1)$.

§ 11.

Случай электромагнитного поля — в каком-то смысле простейший из возможных, так как структурная группа расслоения в этом случае очень проста. Однако этим примером не исчерпывается описание физических полей в терминах расслоений и связностей.

Другой известный пример — это знаменитые *поля Янга—Миллса*, служащие для описания поведения нуклонов (протонов и нейтронов). Эти поля интерпретируются как связности в главном расслоении со структурной группой $G = \mathrm{SU}(2)$ (так обозначается группа всех невырожденных комплексных матриц размера 2×2, определитель которых равен 1). В этом случае все формы связности и кривизны являются матричными, и те упрощения, которые были возможны в случае электромагнитного поля, здесь не проходят. Однако выписанный нами словарик «работает» и для этих полей.

Исследуя подобного рода модели, физики научились вычислять такие величины, как масса протона и масса нейтрона, просто решая с помощью компьютера соответствующие уравнения. Но это тема совсем другой лекции.

Андрей Андреевич Болибрух

Уравнения Максвелла и дифференциальные формы

Редактор Е. Смирнов
Серийное оформление обложки разработал М. Панов.

Издательство Московского Центра
непрерывного математического образования

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г.

Подписано в печать 27.2.2002 г. Формат 60×88 $^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1.
Печать офсетная. Печ. л. 1,5. Тираж 1000 экз. Заказ №

МЦНМО
121002, Москва, Большой Власьевский пер., 11

Отпечатано с готовых диапозитивов в Московской типографии «Транспечать»
107078, Москва, Каланчевский тупик, д. 3/5

ISBN 5-94057-022-4

9 785940 570226 >